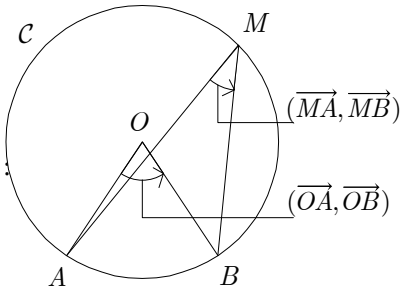
Théorème :

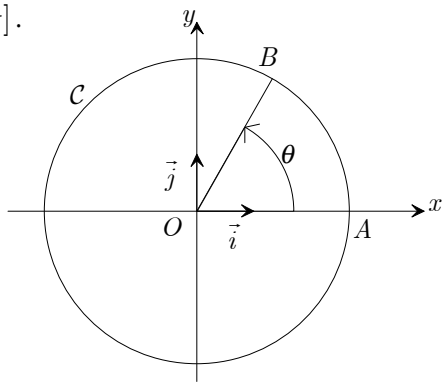
Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien orienté et $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon $R>0$ de ce plan.
Soit A et B deux points distincts du cercle $\mathcal{C}$.
Pour tout point M du plan $\mathcal{P}$ autre que A et B on a :
$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) \quad [2\pi]$



Démonstration :

Soit $\mathcal{R} = (O;\vec{i},\vec{j})$ le repère orthonormé direct déterminé à partir du vecteur unitaire $\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{OA}}{OA}$.

Dans ce repère : $A(R)$ et $B(R.\mathrm{e}^{i\theta})$ avec $\theta = (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) \quad [2\pi]$.



On a $\theta \neq 0 \quad [2\pi]$ car A et B sont distincts.

Soit M un point du plan $\mathcal{P}$ autre que A et B.
Notons z l'affixe de M.
On a $z \neq R$, $z \neq R.\mathrm{e}^{i\theta}$ et

$$(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = \arg\left(\frac{R.\mathrm{e}^{i\theta}-z}{R-z}\right) \quad [2\pi].$$

On a :

$$2(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) \quad [2\pi] \Leftrightarrow 2\arg\frac{R.\mathrm{e}^{i\theta}-z}{R-z} = \theta \quad [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{R.\mathrm{e}^{i\theta}-z}{R-z}\right) - \frac{\theta}{2} = 0 \quad [\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{R.\mathrm{e}^{i\theta}-z}{R-z}.\mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = 0 \quad [\pi]$$

$$\Leftrightarrow \frac{R.\mathrm{e}^{i\theta}-z}{R-z}.\mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{2}} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{R.\mathrm{e}^{i\theta}-z}{R-z}.\mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{2}} = \overline{\left(\frac{R.\mathrm{e}^{i\theta}-z}{R-z}.\mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{2}}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{R.\mathrm{e}^{i\theta}-z}{R-z}.\mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{2}} = \frac{R.\mathrm{e}^{-i\theta}-\overline{z}}{R-\overline{z}}\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$\Leftrightarrow (R.\mathrm{e}^{i\theta}-z)(R-\overline{z}) = (R.\mathrm{e}^{-i\theta}-\overline{z})(R-z)\mathrm{e}^{i\theta}$$

$$\Leftrightarrow R^2\mathrm{e}^{i\theta} - zR - \overline{z}R.\mathrm{e}^{i\theta} + |z|^2 = R^2 - zR - \overline{z}R.\mathrm{e}^{i\theta} + |z|^2\,\mathrm{e}^{i\theta}$$

$$\Leftrightarrow |z|^2(1-\mathrm{e}^{i\theta}) = R^2(1-\mathrm{e}^{i\theta})$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 = R^2$$

$$\Leftrightarrow M \in \mathcal{C}$$

Ceci établit l'équivalence voulue.